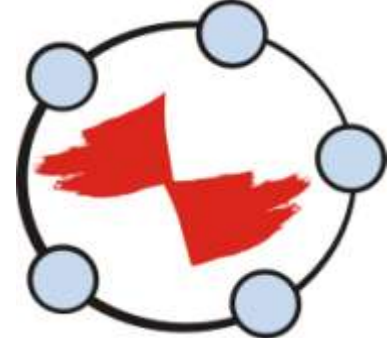




Asociación  
Castellana y Leonesa de  
Educación Matemática  
Miguel de Guzmán



# “Hacer” Matemáticas en clase de matemáticas

Antonio Pérez Sanz

<http://platea.pntic.mec.es/aperez4>  
[aperez4.blogspot.com](http://aperez4.blogspot.com)



Abril 2016

Preguntas.



¿Qué es la Educación Matemática?

¿Qué es enseñar matemáticas?

¿Qué es aprender?

¿Quién aprende y quién enseña?

¿Dónde y cómo se aprende?...

# Lamento de un matemático

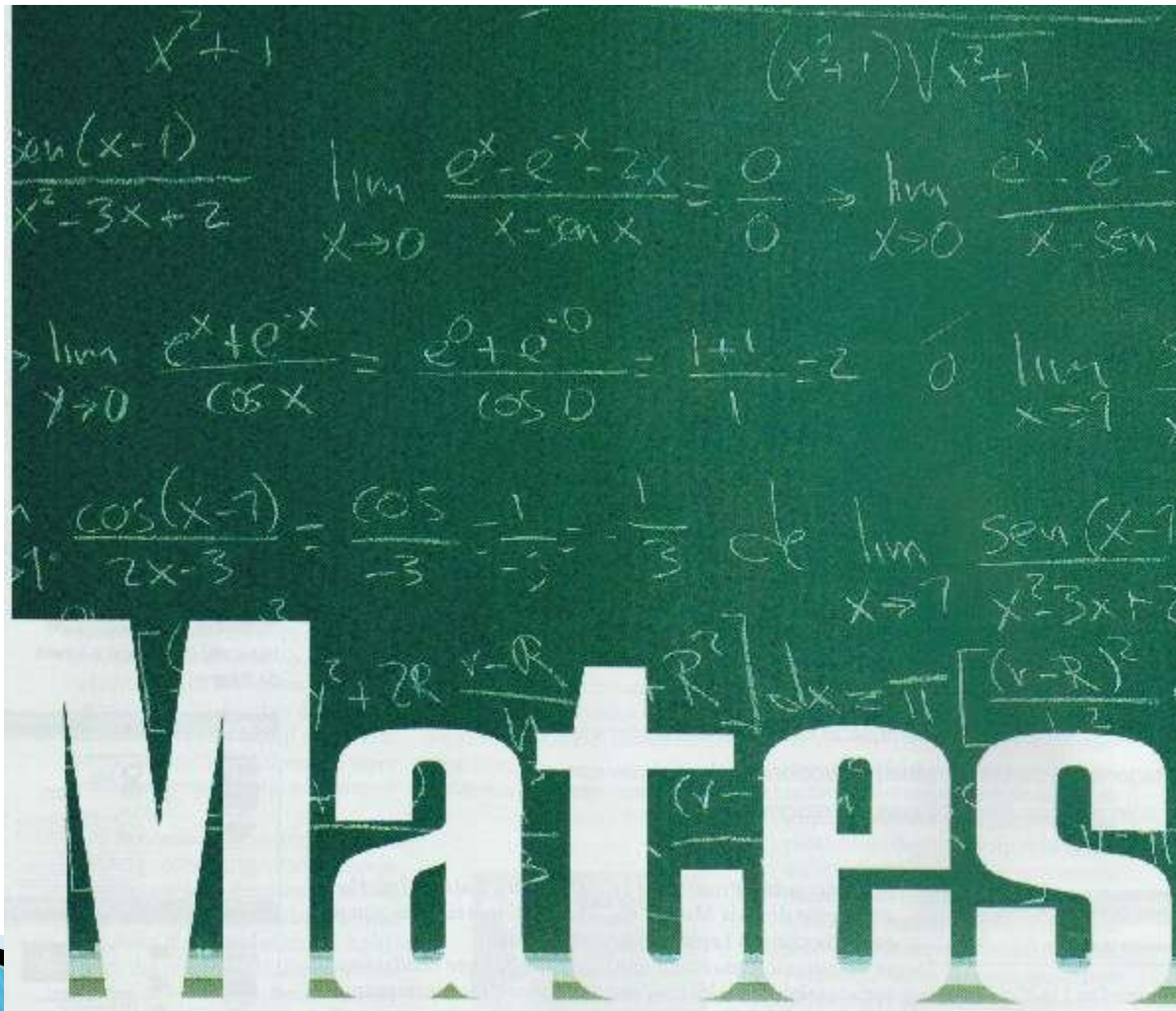
***Hacer matemáticas es** participar en un acto de descubrimiento y conjetura, intuición e inspiración; estar en un estado de confusión —no porque no tenga sentido para ti, sino porque tú le diste sentido y aún no entiendes qué es lo que tu creación tiene en mente—; tener una idea revolucionaria; estar frustrado como artista; estar asombrado y abrumado por una belleza casi dolorosa; **estar vivo, maldita sea.***

*Elimina esto de las matemáticas y ya puedes tener todas las clases magistrales que quieras; no importará. **Operad** todo lo que queráis doctores: **vuestro paciente ya está muerto.***

Paul Lockhart.

La Gaceta de la RSME. Vol 11. Num. 4. 2008

# La mala imagen...




# Matemáticas en la Escuela

¿Qué pasa cuando salen de las aulas?

Recuerdos inútiles de rutinas y procesos complicados que no han vuelto a utilizar en su vida.

*¿Qué político, periodista, médico, fontanero, carpintero, economista, químico, antropólogo, cineasta, cámara de televisión, jardinero, ministro, concejal... ha utilizado para tomar alguna decisión trascendental de su vida la tecla **ln** de la calculadora?*





# El nuevo alumno

“¡No tengo déficit de atención,  
simplemente no estoy escuchando!”



# ¿Qué matemáticas enseñamos?

1. *No podemos enseñar las mismas matemáticas que en los años 50, 70 o 90 a futuros ciudadanos del siglo XXI.*
2. La sociedad necesita y demanda **otros conocimientos y otras actitudes** ante las matemáticas.
3. *Las herramientas tecnológicas han cambiado el uso y la aproximación a las matemáticas*

**...Diga lo que diga el BOE...**



# ¿Qué matemáticas enseñamos?

## 1 Fracciones y decimales

Página 18

1. Números racionales
2. Operaciones con fracciones
3. La fracción como operador
4. Números decimales
5. Paso de decimal a fracción
6. Cálculo con porcentajes
7. Interés compuesto

## 2 Potencias y raíces. Números aproximados

Página 20

1. Potencias
2. Números racionales e irracionales
3. Aproximaciones y errores
6. Notación científica

## 3 Progresiones

Página 58

1. Sucesiones
2. Progresiones aritméticas
3. Progresiones geométricas

## 4 El lenguaje algebraico

Página 76

1. Expresiones algebraicas
2. Monomios
3. Polinomios
4. Operaciones con expresiones algebraicas

## 5 Ecuaciones

Página 92

1. Ecuaciones. Solución de una ecuación
2. Ecuaciones de primer grado
3. Ecuaciones de segundo grado
4. Resolución de problemas con ecuaciones

## 6 Sistemas de ecuaciones

Página 110



1. Ecuaciones con dos incógnitas. Soluciones
2. Sistemas de ecuaciones
3. Sistemas equivalentes
4. Número de soluciones de un sistema lineal
5. Métodos de resolución de sistemas
6. Resolución de problemas mediante sistemas

## 7 Funciones y gráficas

Página 126



1. Las funciones y sus gráficas
2. Variaciones de una función
3. Tendencias de una función
4. Discontinuidades. Continuidad
5. Expresión analítica de una función

## 8 Funciones lineales

Página 148



1. Función de proporcionalidad  $y = mx$
2. La función  $y = mx + n$
3. Recta de la que se conoce un punto y la pendiente
4. Ecuación de la recta que pasa por dos puntos
5. Forma general de la ecuación de una recta
6. Aplicaciones de la función lineal
7. Estudio conjunto de dos funciones

## 9 Problemas métricos en el plano

Página 168



1. Ángulos en la circunferencia
2. Semejanza de triángulos
3. Teorema de Pitágoras. Aplicaciones
4. Aplicaciones algebraicas del teorema de Pitágoras
5. Lugares geométricos
6. Las cónicas como lugares geométricos
7. Áreas de los polígonos
8. Áreas de figuras curvas

## 10 Cuerpos geométricos

Página 190



1. Poliedros regulares (sólidos platónicos)
2. Poliedros semirregulares
3. Planos de simetría de una figura
4. Ejes de giro de una figura
5. Superficie de los cuerpos geométricos
6. Medida del volumen de los cuerpos geométricos
7. Coordenadas
8. Mapas

## 11 Transformaciones geométricas



1. Transformaciones geométricas
2. Traslaciones en el plano
3. Estudio de las traslaciones
4. Estudio de los giros
5. Simetrías axiales
6. Composición de movimientos
7. Mosaicos, cenefas y rosetones

## 12 Estadística

Página 236



1. Población y muestra
2. Variables estadísticas
3. El proceso que se sigue en estadística
4. Confección de una tabla de frecuencias
5. Método adecuado al tipo de información
6. Medidas estadísticas
7. Medidas de tendencia central
8. Medidas de dispersión

## 13 Azar y probabilidad

Página 260



1. Sucesos elementales
2. Probabilidad de un suceso
3. Ley de Laplace para experiencias regulares

MAT. CONTINUA

GEOMETRÍA

ANÁLISIS

estadística

MAT.

DISCRETA

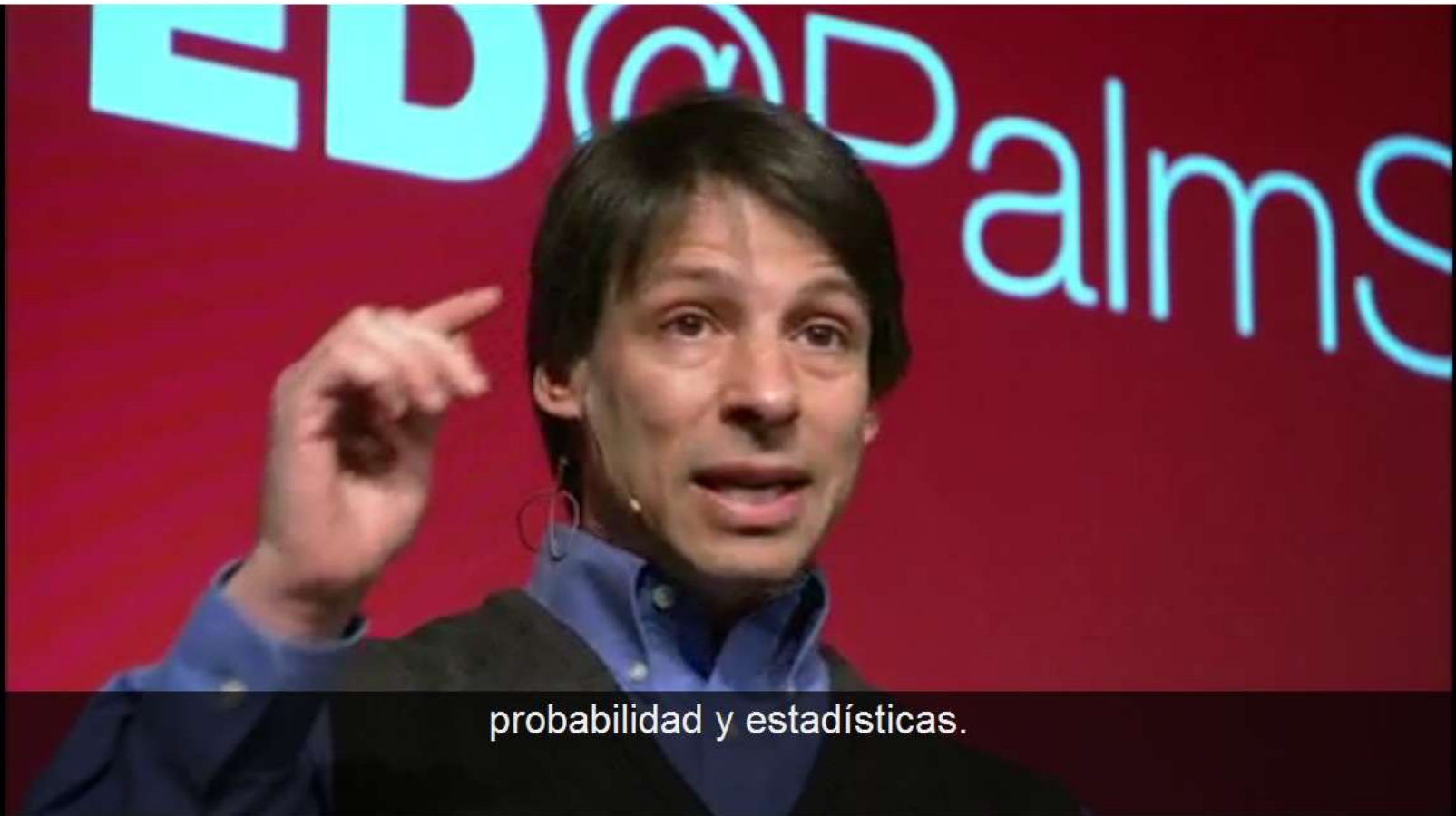
probabilidad

ÁLGEBRA



# La solución parcial de Arthur Benjamin

TED2009, Filmed Feb 2009; Posted Jun 2009



probabilidad y estadísticas.



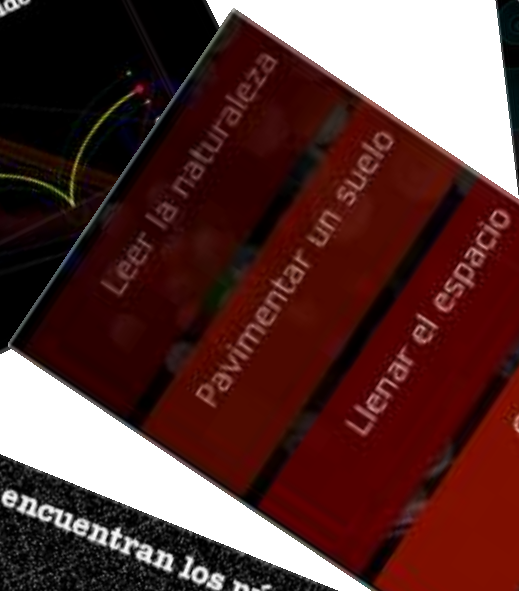
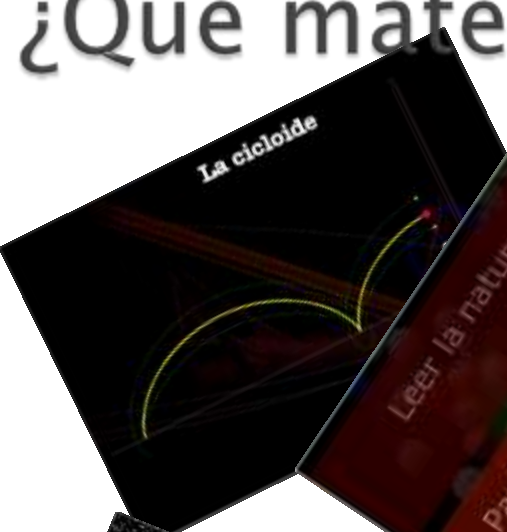
01:03 | 03:02

Share

Rate

Subtitles Available in: Spanish

# ¿Qué matemáticas deberíamos enseñar?

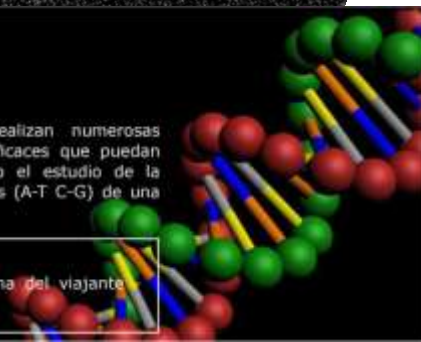


## Aplicaciones de las matemáticas

Matemáticos, informáticos y genetistas realizan numerosas investigaciones para encontrar algoritmos eficaces que puedan resolver estos problemas complejos... como el estudio de la secuenciación de las 30.000 a 100.000 bases (A-T C-G) de una molécula de ADN.

### PALABRAS CLAVE PARA SITIOS WEB :

Grafos - Caminos hamiltonianos - Problema del viajante - Optimización



# ¿Cómo enseñamos?

## Matemáticas ¿experimentales?

[www.mathex.org/](http://www.mathex.org/)  
[www.experiencingmaths.org/](http://www.experiencingmaths.org/)



Esta exposición virtual está diseñada para estudiantes de matemáticas, a sus alumnos, pero también para todo a los de secundaria - y a todos los que sienten curiosidad por las matemáticas y las ciencias en general.

# Matemáticas

# EXPERIMENTALES

experimentales

Esta exposición virtual presenta más de **200 situaciones matemáticas** que proponen a los alumnos experimentar, ensayar, plantear hipótesis, testarlas, intentar validarlas, buscar demostrar y debatir alrededor de las propiedades matemáticas.

Como la exposición internacional itinerante "**¿Por qué las matemáticas?**", ha sido concebida y realizada por iniciativa y con la colaboración de la UNESCO, por el Centre•Sciences y el Adecum.





# ¿Competentes?

Pr. Philippe Perrenoud, 1997:

“En el mejor de los casos, los jóvenes son "sabios", cuando salen de la escuela. Pero no son necesariamente competentes.

Es decir: no aprendieron a movilizar sus conocimientos fuera de las situaciones de examen”

Una competencia es una capacidad de acción eficaz frente a una familia de situaciones, quien llega a dominarla es porque dispone a la vez de los conocimientos necesarios y de la capacidad de movilizarlos con buen juicio, a su debido tiempo, para definir y solucionar verdaderos problemas.

Un aperitivo

¿Publicidad casual?



# COMPETENCIA MATEMÁTICA

## El número 153

El número 153 es suma de los cubos de sus cifras, 1, 5 y 3.

$$1^3 + 5^3 + 3^3 = 1 + 125 + 27 = 153$$

*¿Hay otros números de tres cifras que cumplan lo mismo?*



# 153. Atractor extraño

$$36: \quad 3^3 + 6^3 = 27 + 216 = 243$$

$$243: \quad 2^3 + 4^3 + 3^3 = 8 + 64 + 27 = 99$$

$$99: \quad 9^3 + 9^3 = 729 + 729 = 1458$$

$$1458: \quad 1^3 + 4^3 + 5^3 + 8^3 = 1 + 64 + 125 + 512 \\ = 702$$

$$702: \quad 7^3 + 0^3 + 2^3 = 343 + 8 = 351$$

$$351: \quad 3^3 + 5^3 + 1^3 = 27 + 125 + 1 = \mathbf{153}$$

# El poder de las TIC

		6	9	6			SUMA	
Cubos		216	729	216			1161	
	1	1	6	1				
Cubos	1	1	216	1			219	sigue
	0	2	1	9				
Cubos	0	8	1	729			738	sigue
	0	7	3	8				
Cubos	0	343	27	512			882	sigue
	0	8	8	2				
Cubos	0	512	512	8			1032	sigue
	1	0	3	2				
Cubos	1	0	27	8			36	sigue
	0	0	3	6				
Cubos	0	0	27	216			243	sigue
	0	2	4	3				
Cubos	0	8	64	27			99	sigue
	0	0	9	9				
Cubos	0	0	729	729			1458	sigue

# Miguel de Guzmán

Existen constelaciones de hechos matemáticos que se prestan para hacer de ellos una novela bien interesante.

*Me pregunto si el tiempo malgastado en muchos de nuestros rollos magistrales en los que tanto abundamos los profesores de matemáticas de todos los niveles no podría invertirse con gran provecho en contar pausadamente alguna de estas historias apasionantes del pensamiento humano*





# Investigar en clase

- ▶ ¿Cuál es el número mínimo de naranjas con las que puedo formar o bien un cuadrado o bien una pirámide de base cuadrada?
- ▶ 1, 5, 14, 30, 55...       $a(n)$ ?
- ▶  $N = \Delta + \Delta + \Delta$
- ▶  $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = ??$

*Pitágoras, Euclides, Fermat, Euler, Gauss, Cauchy...*

!!!Utiliza las TIC!!!

# Hacer matemáticas: ¿De qué hablamos?

**Un ejemplo: geometría clásica**

... Vale más que mil palabras...





# Fibonacci, sin conejos

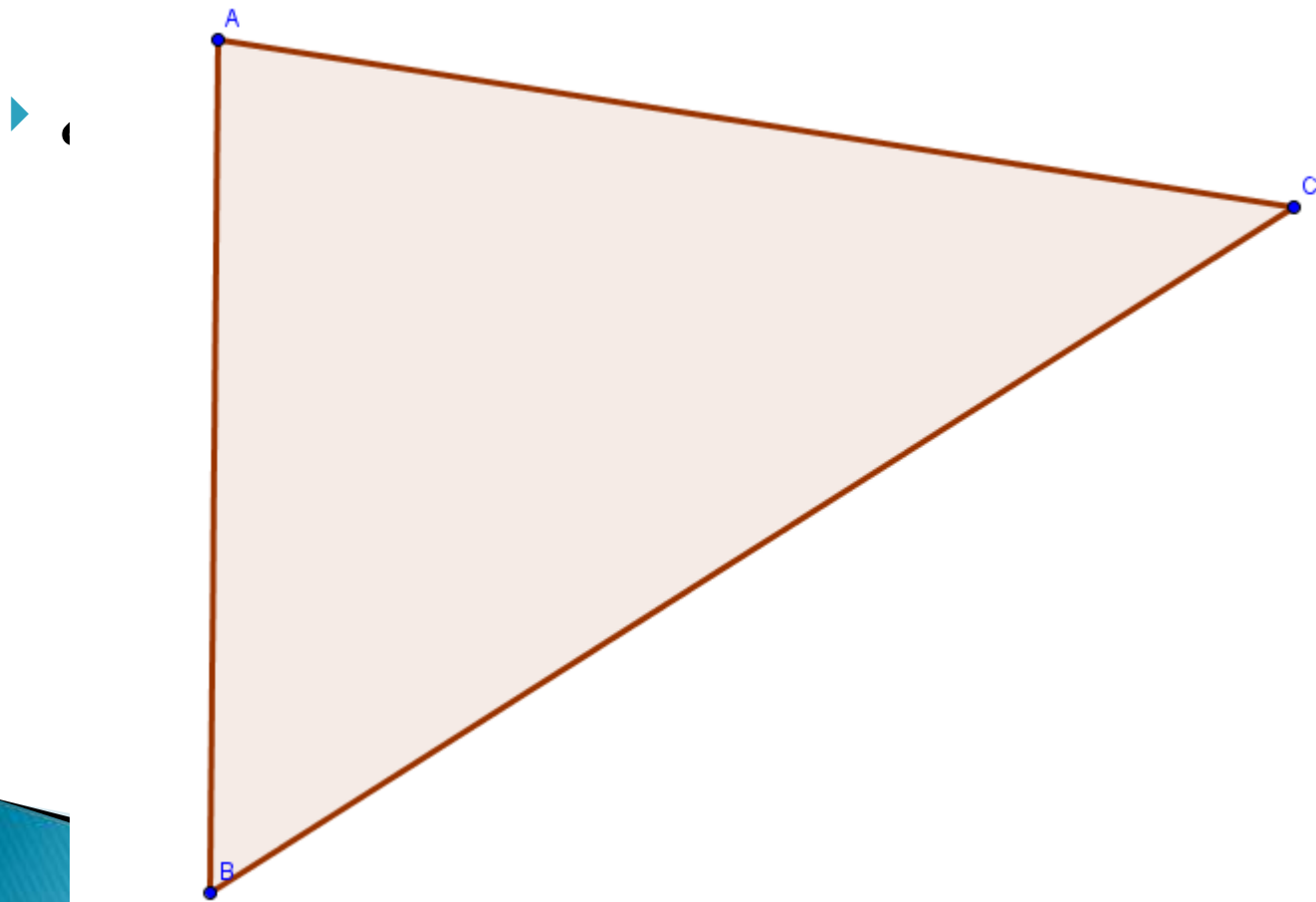
## ► Practica geometriae. 1220

- Dividir figuras: “*Sobre la división de campos entre varios propietarios*”
  - Un precursor: Abraham Bar Hiyya.
  - Un colega: Jordano de Nemore



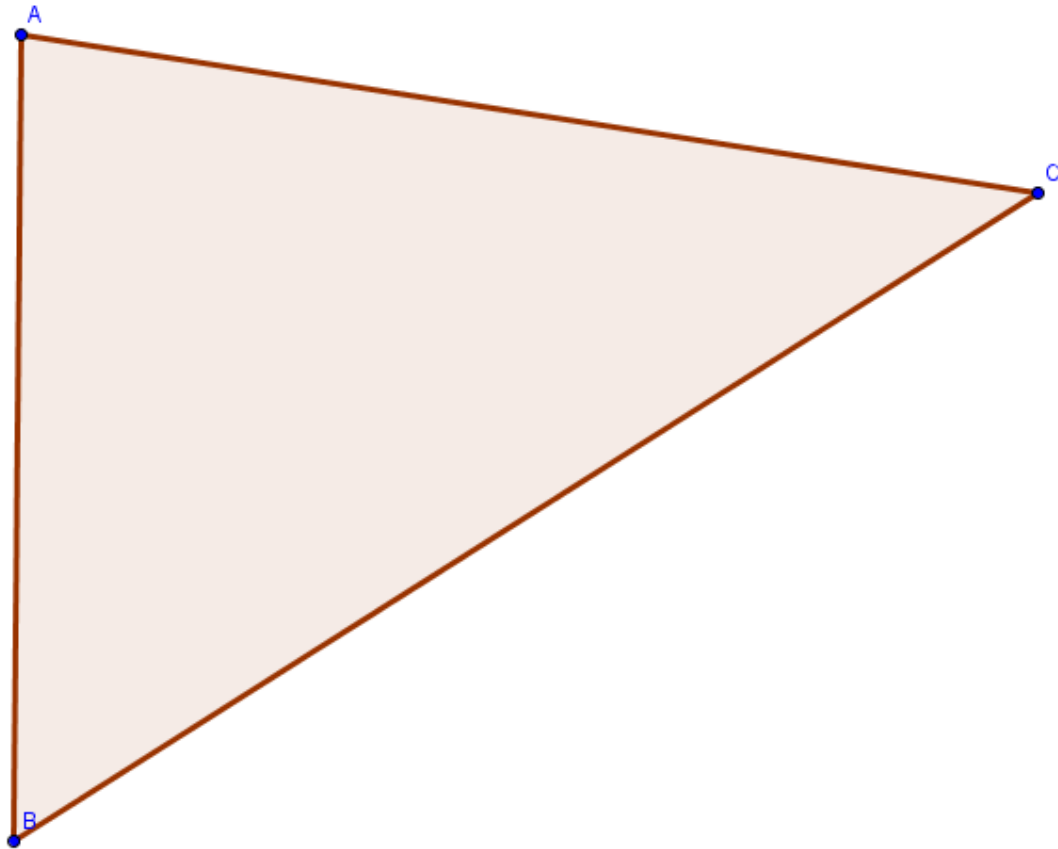
# Problema:

“Dividir un triángulo en dos partes iguales”



# Negociación en el aula

- ▶ Con igual área, aunque no tengan la misma forma.



# Investigación

## Haciendo matemáticas en clase

Teorema propio:

*La mediana divide al triángulo en dos triángulos de igual área*

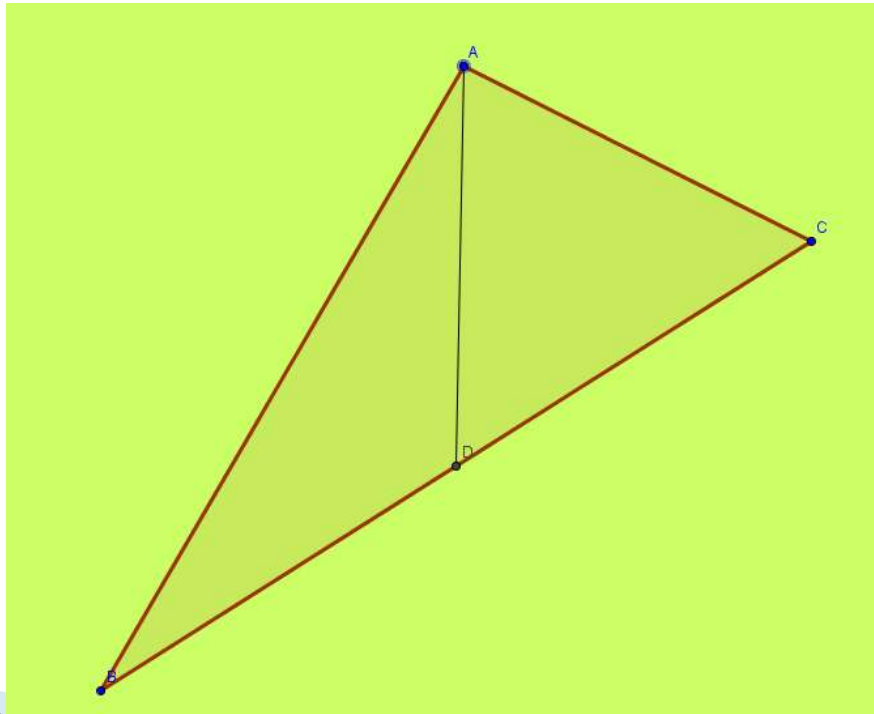
*Practica geometriae. L. de Pisa. Fibonacci*

*Así, si quieres dividir un triángulo cualquiera en dos iguales a partir de uno de sus vértices, traza una línea desde ese vértice hasta el centro del lado opuesto*

*No está en el BOE*

# ¿Es la mejor forma?

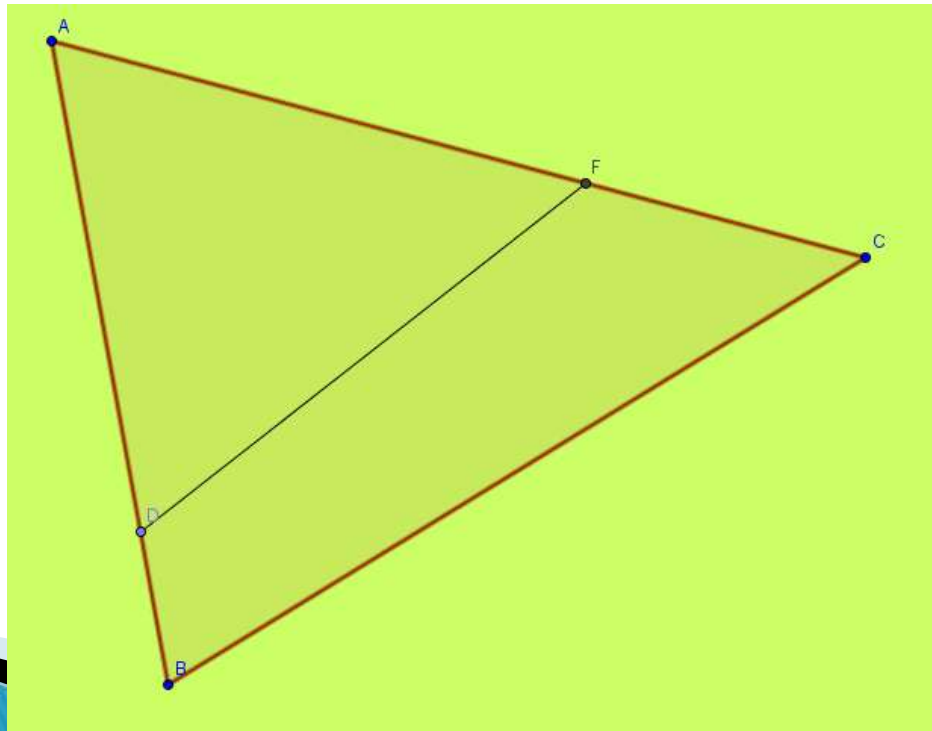
- ▶ ¿Es la mejor solución si quiero construir una casa en cada una de las parcelas?



# Sin pasar por el vértice

Mediante una recta que pase por un punto dado de un lado.

Jordano de Nemore. *Liber philotegni*.

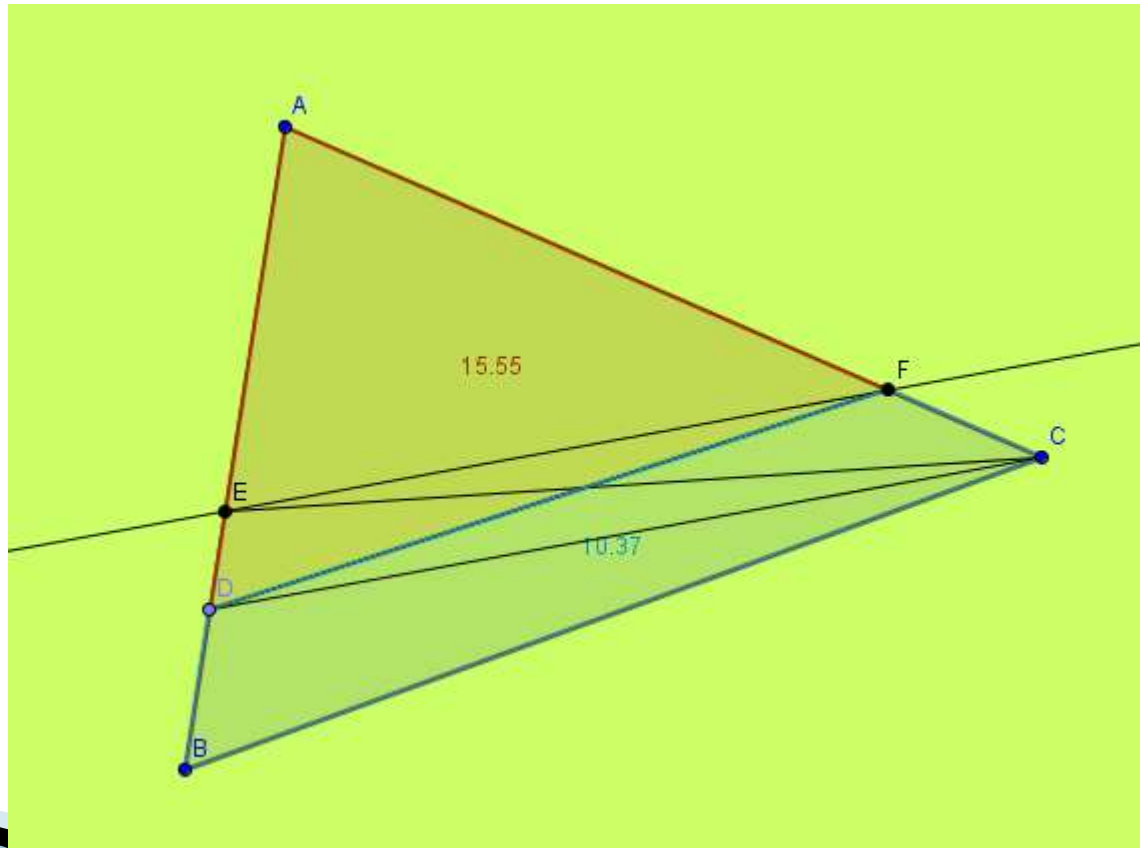




# ¿Y si...?

## Generalización

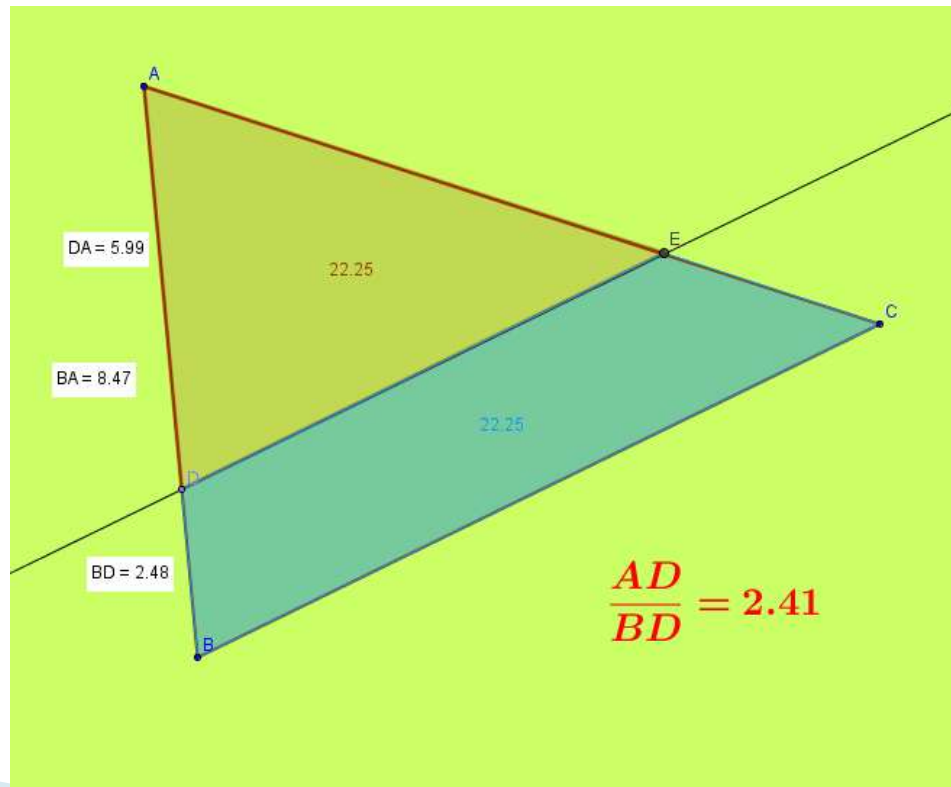
Que una parte sea los  $\frac{2}{5}$  y la otra los  $\frac{3}{5}$

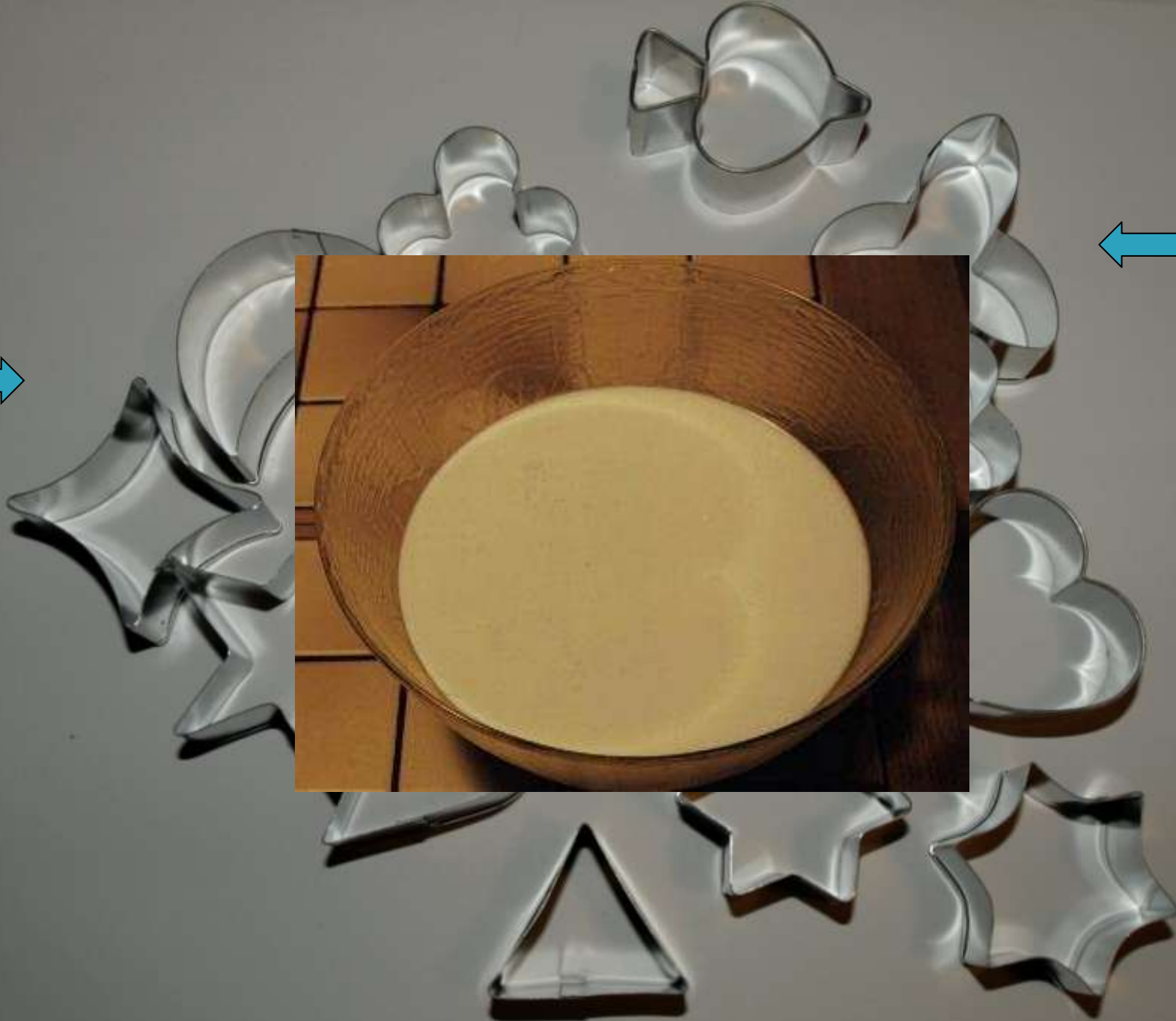


# Más difícil

Mediante una recta paralela a un lado

- Geogebra en nuestra ayuda.





# Ecuaciones de las flores



GGtube



# 1º Bachillerato

IES Salvador Dalí  
Primavera de 2008  
Ecuaciones de las flores  
Funciones

**Antonio Pérez Sanz**

# Matemáticas y Naturaleza

*El Universo es un libro escrito en el lenguaje de las matemáticas, siendo sus caracteres triángulos, círculos y otras figuras geométricas, sin las cuales es humanamente imposible comprender una sola palabra; sin ellos solo se conseguirá vagar por un oscuro laberinto"*

*Galileo Galilei*

La mente humana, previa y libremente, tiene que construir formas antes de encontrarlas en las cosas

Albert Einstein



# NATURALEZA



# Y... MATEMÁTICAS

$$(x - a)^2 (x^2 + y^2) = b^2 x^2$$

$$\rho = a \cos n\theta + b$$

$$\rho = \frac{a}{\cos \theta} + b$$

$$r = C \cdot e^{k \cdot \theta}$$

# Investigando pétalos

Herramienta: [winplot](http://math.exeter.edu/rparris/winplot)

<http://math.exeter.edu/rparris>

Ideas:

- ▶ una forma que rota y se repite periódicamente...
- ▶ una silueta que se aleja y se acerca al centro...
- ▶ ¡¡funciones trigonométricas y coordenadas polares!!



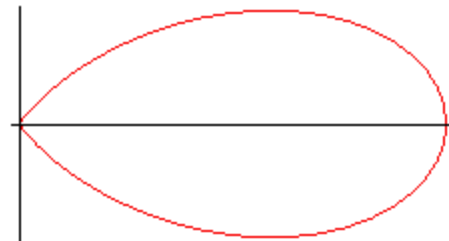
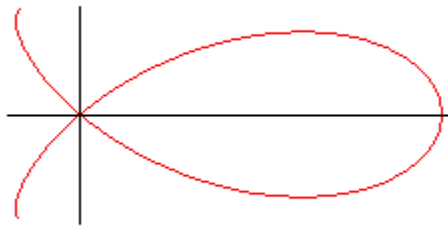
# Concoide de rosetón

Las curvas botánicas.

S. XVIII. Abbot Guido Grandi

- Fórmula en polares

$$\rho = a \cos n\theta + b$$



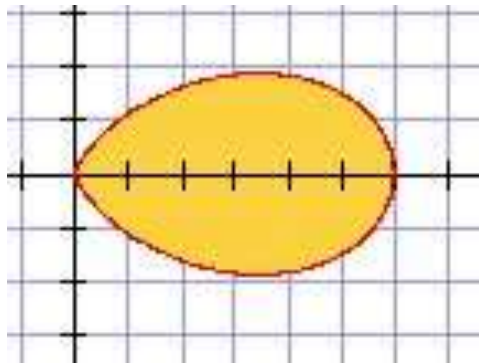
$$0 < b < a$$

$$a=b$$

$$\rho = a \cos n\theta + b$$

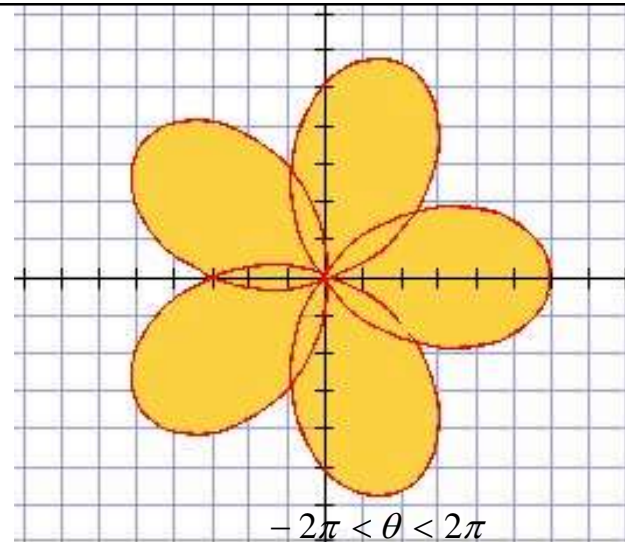


Ejemplo1: Pétalo simple: Caso  $a = b$   
 $n = 5/2$



$$-\frac{\pi}{2.5} < \theta < \frac{\pi}{2.5}$$

Ecuación  $\rho = 3 \cos \frac{5}{2} \theta + 3$



$$-2\pi < \theta < 2\pi$$

Si hacemos variar  
 la flor completa

obtenemos

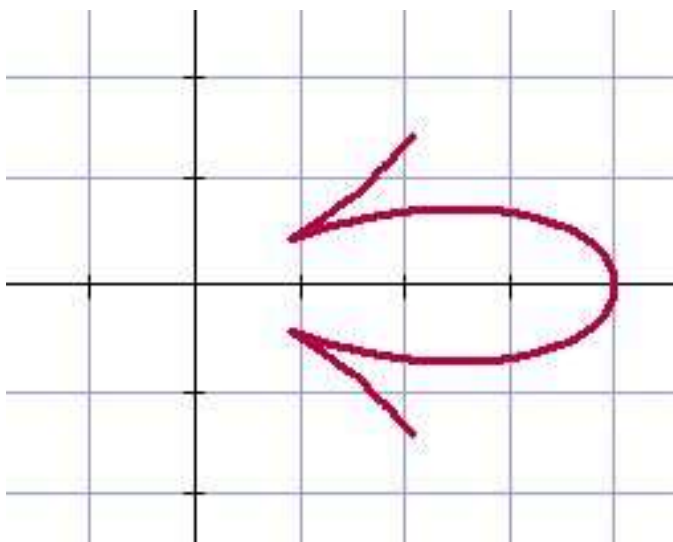


$$0 < b < a \quad \rho = a \cos n\theta + b$$

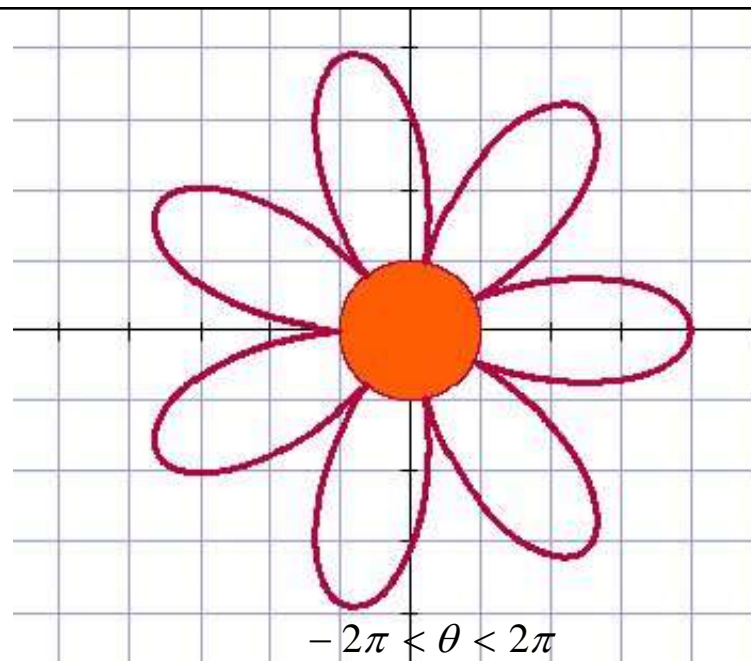


Ejemplo1: Pétalo simple: Caso  $0 < b < a$   
 $n = 7/2$

Ecuación  $\rho = 3 \left| \cos \frac{7}{2} \theta \right| + 1$



$$-\frac{\pi}{3.5} < \theta < \frac{\pi}{3.5}$$



$$-2\pi < \theta < 2\pi$$

Si hacemos variar  
 la flor completa

obtenemos

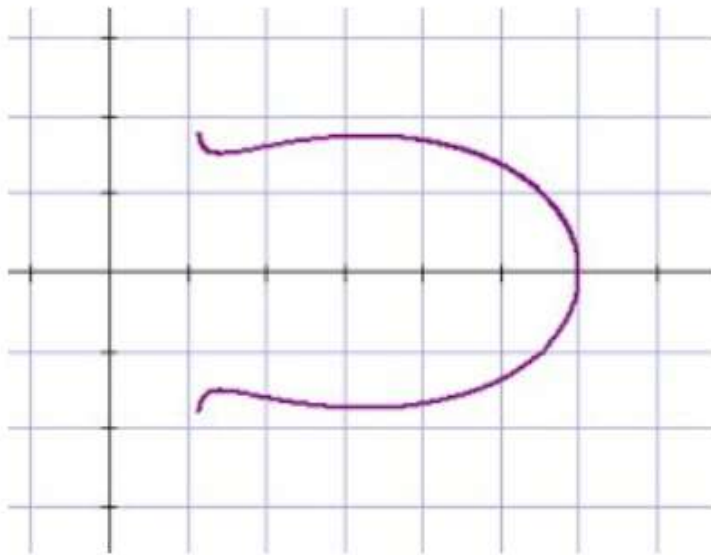


$$\rho = a \cos n\theta + b$$

Caso  $b > a$

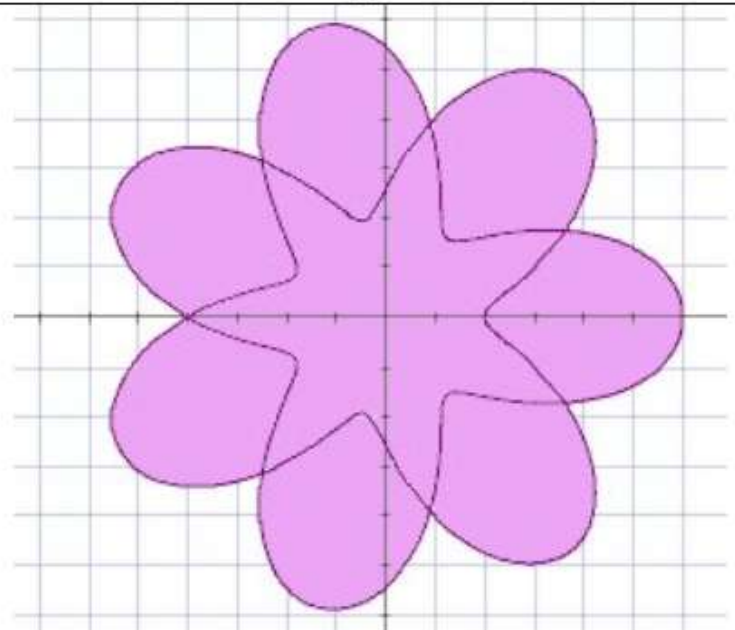


Ejemplo1: Pétalo simple: Caso  $b > a$   
 $n = 7/2$



$$-\frac{\pi}{3.5} < \theta < \frac{\pi}{3.5}$$

Ecuación  $\rho = 2 \cos \frac{7}{2} \theta + 4$



Si hacemos variar  $-2\pi < \theta < 2\pi$  obtenemos la flor completa



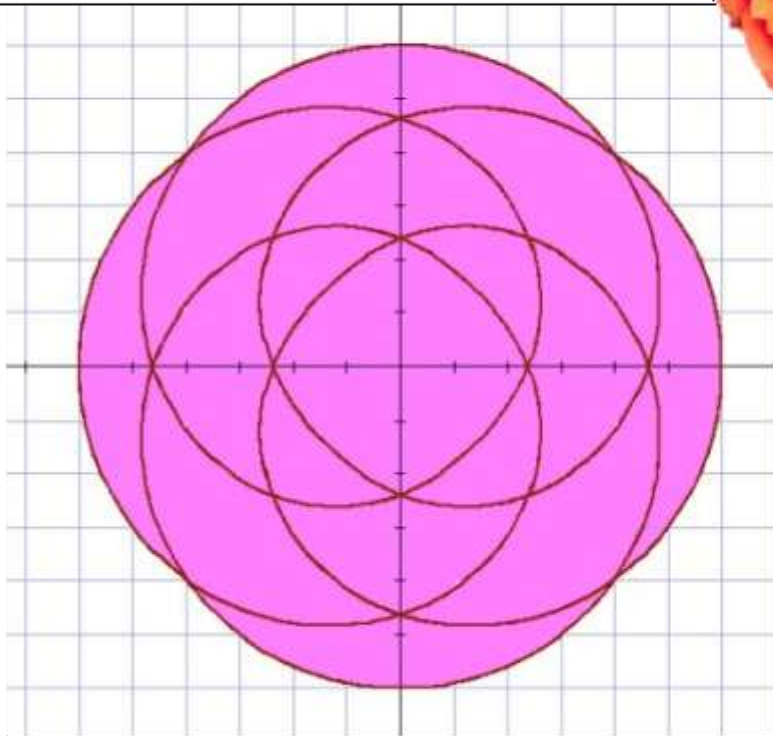
$$\rho = a \cos n\theta + b$$

## Rosáceas: $n < 1$



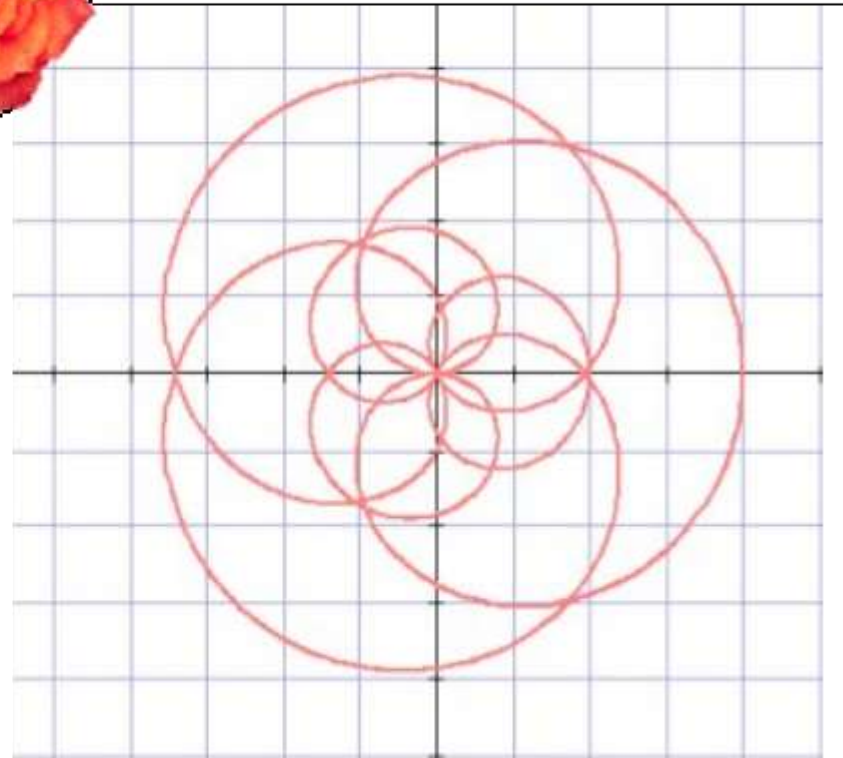
**Caso  $b > a$**

**Ecuación**  $\rho = 2 \cos \frac{4}{5} \theta + 4$



**Caso  $0 < b < a$**

**Ecuación**  $\rho = 3 \cos \frac{3}{5} \theta + 1$

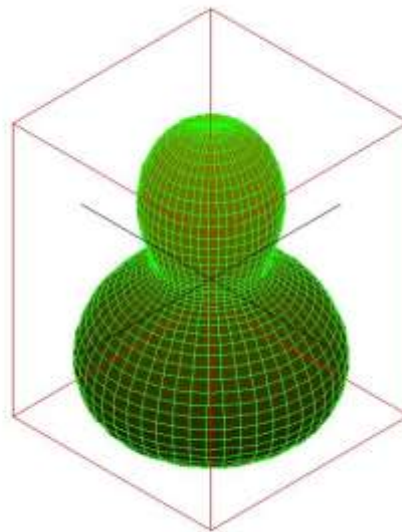




# De las flores... a los frutos

Coordenadas esféricas

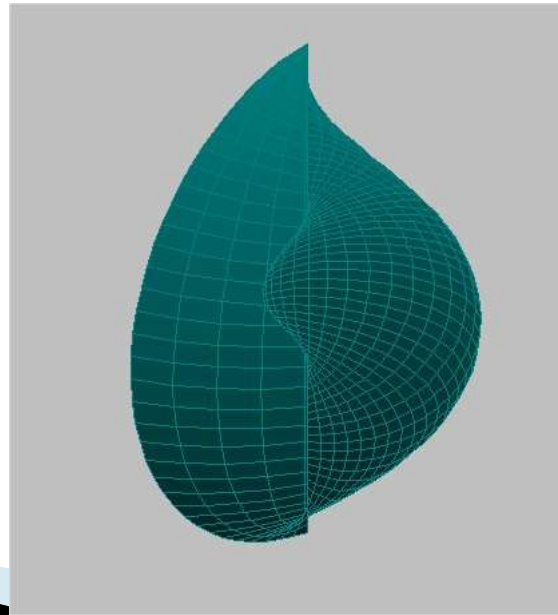
$$r = -2,4 - \frac{6}{5} \operatorname{sen} \frac{5}{2} u$$



# De la calabaza a la concha del peregrino

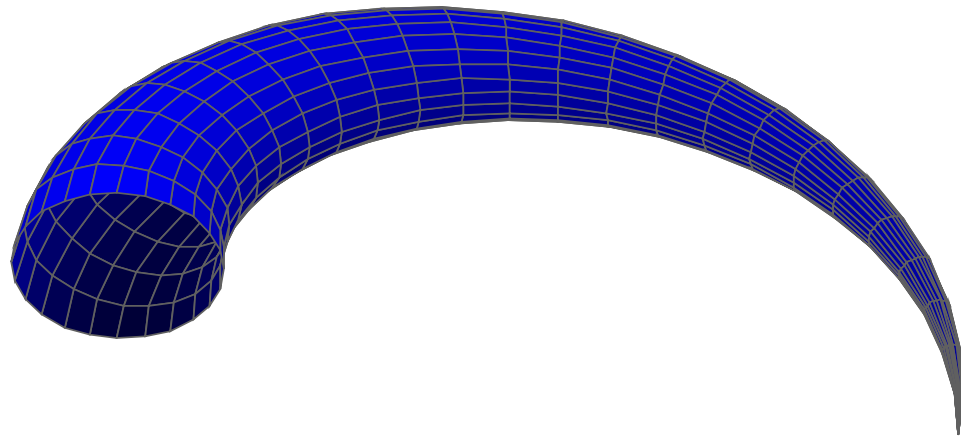
Coordenadas esféricas

$$r = -2,4 - \frac{6}{5} \operatorname{sen} \frac{5}{2} u + 5t$$

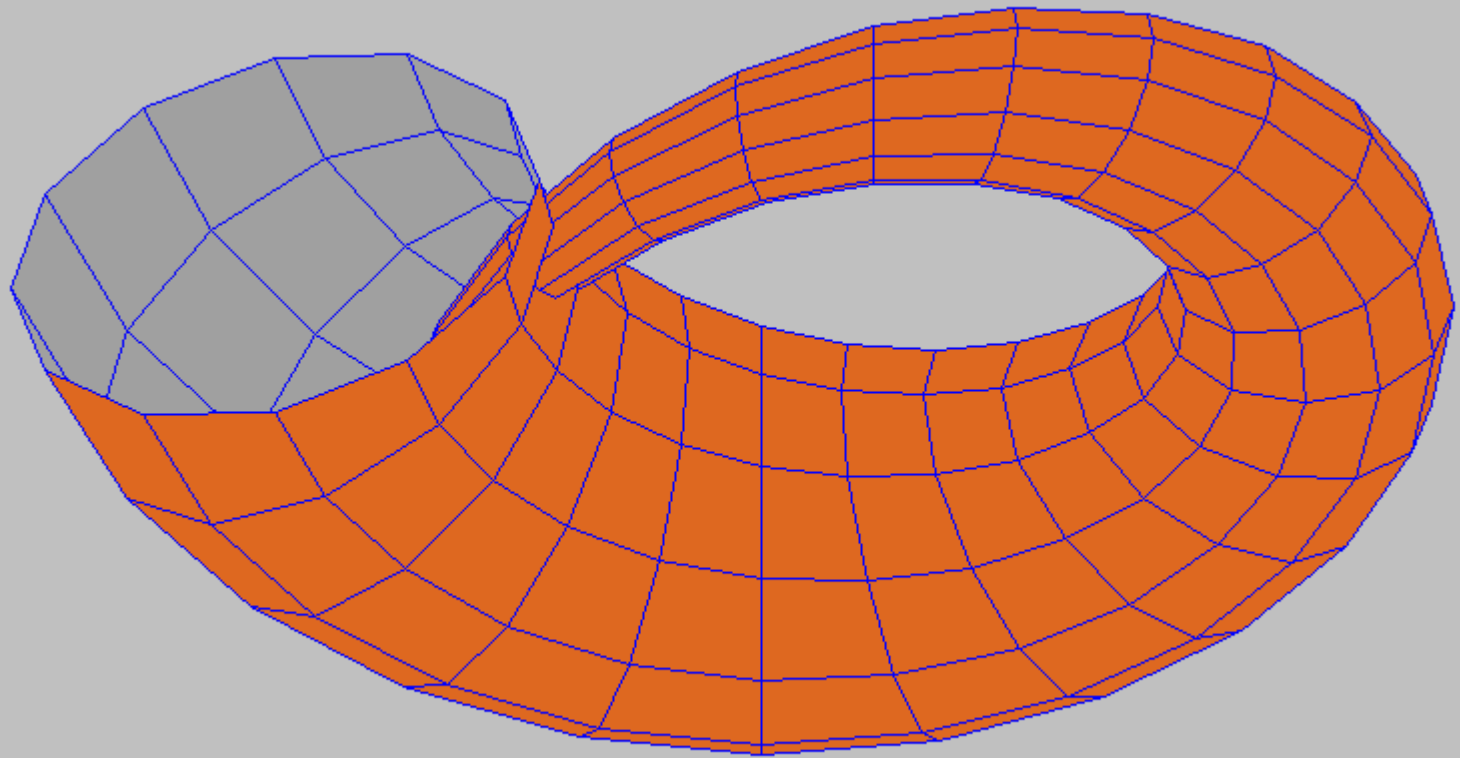


# ¡Y un cuerno!

- ▶  $X = (2 + t \cdot \sin u) \cdot \cos(2\pi t)$
- ▶  $Y = (2 + t \cdot \sin u) \cdot \sin(2\pi t) + 2t$
- ▶  $Z = t \cdot \cos u$



# O una botella de Klein




Y... ¡no dejéis que las  
ecuaciones os impidan ver  
las flores!

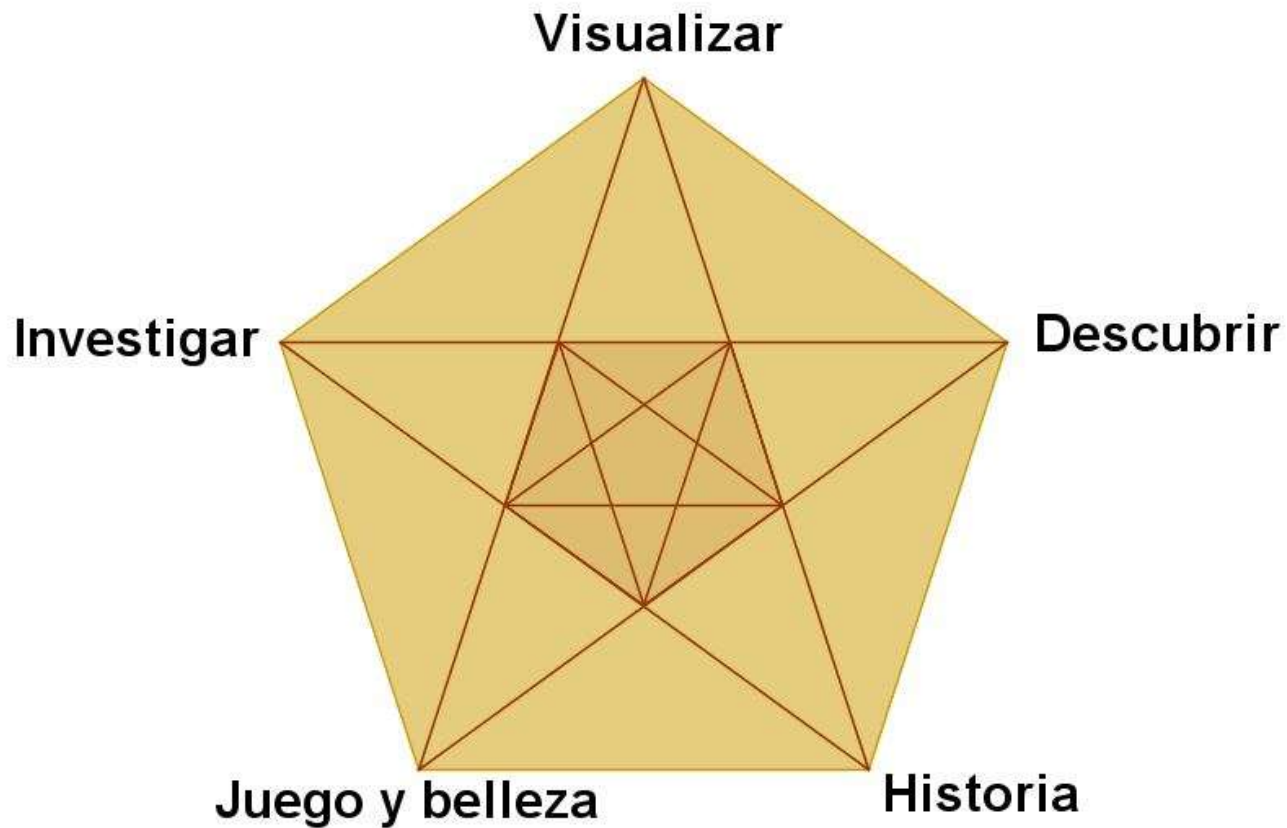




# Escapar de la rutina: el punto prisionero

- ▶ Eppur si muove. (Y sin embargo se mueve)
  - ▶ Herramientas de hoy para problemas vivos de siempre
  - ▶ De lo concreto a lo general
- 

# Pentagrama didáctico



# Con TIC o sin TIC...

## Haced Matemáticas en las clases de Matemáticas

*Lo que tenemos que aprender a hacer, lo  
aprendemos haciéndolo.*

*Aristóteles*

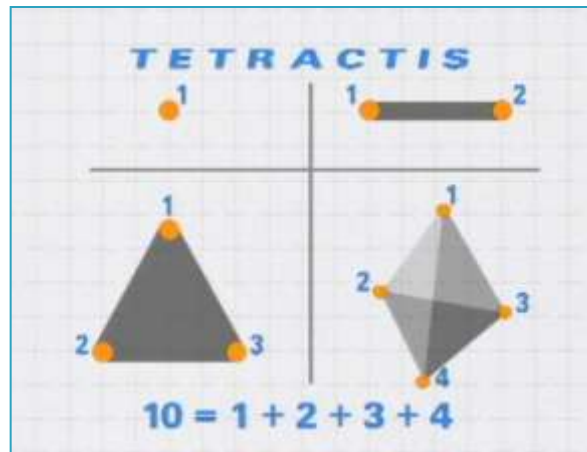
Consejos para enseñar matemáticas y  
no morir en el intento



# DECÁLOGO PARA LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS



# TETRACTIS XXI



10 CONSEJOS PARA LOS PROFESORES Y  
PROFESORAS DE MATEMÁTICAS PARA  
**DISFRUTAR** EN LAS CLASES DE  
MATEMÁTICAS EN EL SIGLO XXI



# 1. Las matemáticas son una ciencia viva



*No dejéis que la ortodoxia histórica, la curricular, las pruebas de nivel autonómicas y las PAUs la maten y la conviertan en una ciencia de museo.*

## 2. La historia de las matemáticas: una excelente profesora



*No la despreciéis. El que ignora su propia historia está obligado a repetirla y además es un necio*

*Me pregunto si el tiempo malgastado en muchos de nuestros rollos magistrales en los que tanto abundamos los profesores de matemáticas de todos los niveles no podría invertirse con gran provecho en contar pausadamente alguna de estas historias apasionantes del pensamiento humano*

Miguel de Guzmán



### 3. No a los integrismos

Huid del integrismo matemático (tanto como del religioso).

Dejad un lugar para la heterodoxia en vuestras clases.

*La matemática no se agota con Euclides y Descartes, por suerte también existieron Arquímedes y Euler; invítalos de vez en cuando a tus clases*

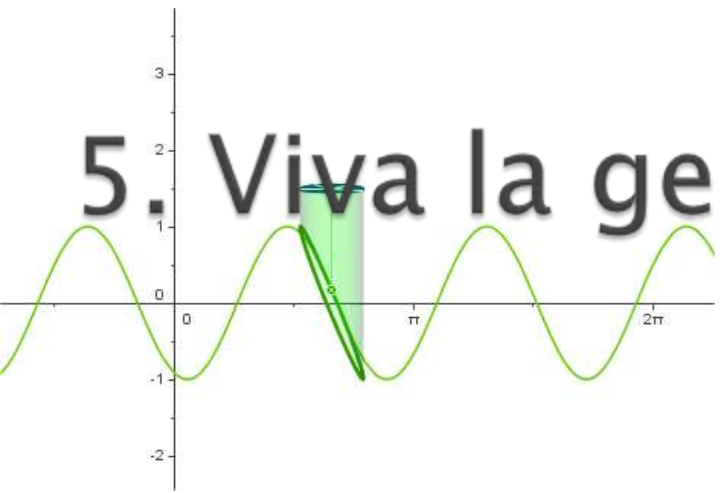
# 4. Recuperar la Aritmética



No confundáis la Aritmética con la Logística

*La reina de las matemáticas es la Aritmética de Gauss, de Fermat, de Euler, de Euclides... no la de los castillos de fracciones y las operaciones sin sentido con radicales*

*Enseñad a pensar, dejad las cuentas a los contables y las raíces a los botánicos.*



## 5. Viva la geometría... dinámica

La geometría es mucho más que calcular áreas y perímetros  
¡ Pero se mueve!, anima un poco la geometría estática.

*La geometría interesante siempre ha sido una geometría del movimiento.*

*No prives tus alumnos de la experiencia de descubrir en geometría.*

Miguel de Guzmán





# 6. No todo es Álgebra y Análisis

Menos fórmulas, más conceptos y sobre todo... más aplicaciones



Lo importante no son las ecuaciones, las derivadas y las integrales. Lo importante es saber para qué sirven

Lo importante es la manzana (C. Alsina)

Calculadoras gráficas, ordenadores y tabletas en las PAUs ¡YA!

# 7. La estadística es matemáticas

No la dejes siempre para el final.

Un alto porcentaje de la información cuantitativa en nuestra sociedad utiliza la estadística como soporte

Hay que liberar a la estadística de las manos de tertulianos y demagogos



# 8. Reivindicar el tiempo



- ▶ Pensar exige tiempo.
  - ▶ Rebelaos contra los programas aberrantes a impartir cada vez con menos horas.
  - ▶ Pedid a los políticos un poco de calma... ¡para vosotros y para vuestros alumnos!
- ...Y de paso también para ellos.

# 9. Utilizar los recursos tecnológicos

## Visualizar las Matemáticas

*"... Esta revolución informática y los nuevos contenidos de la Matemática actual no pueden ser desconocidos por la enseñanza. ... Las Matemáticas no deben enseñarse ya de una manera expositiva, estática, transmitida por el profesor a un conjunto de alumnos pasivos. Es preciso que estos participen, observen, exploren, hagan conjeturas y se enfrenten con problemas que les interesan.*

*Gonzalo Sánchez Vázquez*



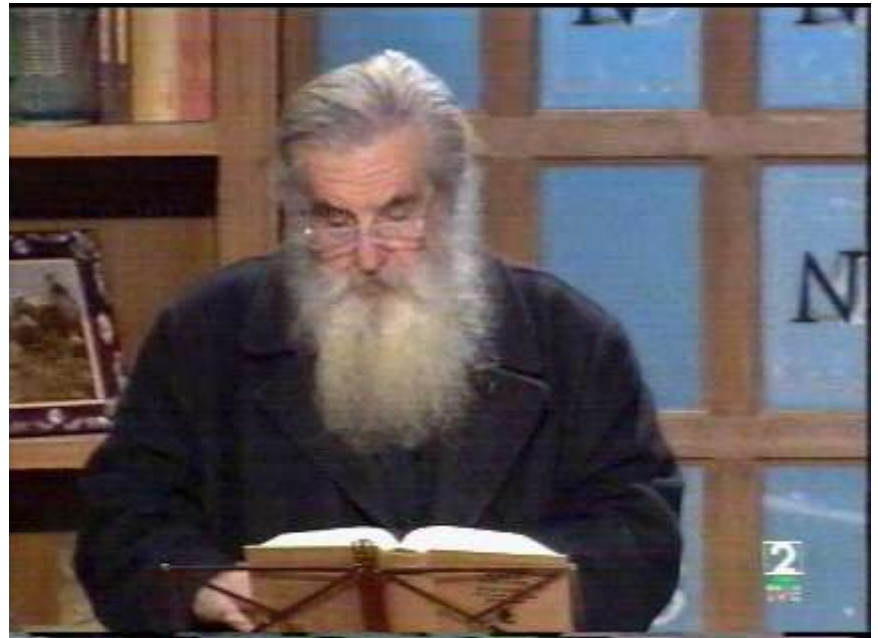
y... 10

Pon poesía en tus clases

¡No dejéis que las ecuaciones os impidan ver las flores!

¡Que las rectas no aplasten las curvas!

Poema de Jesús Lizano





# No todas las matemáticas están en los libros de texto



divulgaMAT  
Centro virtual de divulgación de las matemáticas



RSME  
Real Sociedad Matemática Española



Búsqueda avanzada

menú principal

información

novedades

texto literario del mes

imagen del mes

 dragon curve	 apollonian gasket	 sierpinski sieve
 mandelbrot set	 pythagorean tree	 koch snowflake
 star fractal	 peano curve	 lorenz attractor

### Alfio Quarteroni en M4TEMOZIOA

Para todas aquellas personas que no pudisteis ver, y escuchar, en directo la conferencia de Alfio Quarteroni "Mathematical modelling: from the Galileo legacy to the environment, medicine and technology", dentro del programa M4TEMOZIOA (Bilbao): E...

[Leer más...](#)

Todas las novedades...

### Concurso RSME-Surfer



Hasta el próximo día 31 de mayo está abierto el plazo para subir imágenes para participar en el concurso RSME-Surfer. Se recuerda que la imagen ha de ir acompañada de la ecuación de la superficie y del título elegido, así como del nombre y de la dirección de email del concursante, en la aplicación que se encuentra en

### Fallo de los Concursos Literarios RSME-ANAYA 2011

La Real Sociedad Matemática Española, en colaboración con la editorial ANAYA, la editorial Proyecto Sur, la editorial Nivola, y la editorial elrompecabezas, convocaron en 2011 los concursos literarios de Narraciones Escolares y de

# Lamento de un matemático

«. . . Qué irónico que la gente descarte las matemáticas como la antítesis de la creatividad.

Están desperdiciando una forma de arte más antigua que cualquier libro, más profunda que cualquier poema, y más abstracta que cualquier otra cosa.

*¡Y es el colegio el que ha hecho esto! Qué triste e interminable ciclo de profesores inocentes infligiendo daño a sus inocentes alumnos*

**¡Con lo bien que nos lo podríamos estar pasando todos!»**

Paul Lockhart.  
La Gaceta de la RSME. Vol 11. Num. 4. 2008

# GRACIAS

Antonio Pérez Sanz  
aperez.sanz@gmail.com

